# Topology Groove V: Aggiunzioni in Topologia

Marco Vergura

Venerdì 9 Maggio 2014, Povo, Trento

# Note per il Lettore.

Queste note rendono conto del talk da me tenuto in data 9 Maggio 2014 nell'edificio Povo1 dell'Università degli Studi di Trento, all'interno del ciclo di seminari *Topology Groove*, gestito dal gruppo di approfondimento GrAppA.[1] Tutti gli errori eventualmente presenti in quanto segue sono da imputare a me: chiunque vorrà segnalarmene riceverà la mia gratitudine.[2].

Marco VERGURA

**Convenzioni e Notazioni.** In questo elaborato, si assume di lavorare in un fissato universo di Grothendieck $\mathcal{U}$ tale che $\omega$ (il più piccolo ordinale limite) appartenga ad $\mathcal{U}$. Dunque, ogni occorrenza dell'aggettivo *piccolo* è da intendersi relativamente ad $\mathcal{U}$, ossia come $\mathcal{U}-$*piccolo*.

Ogni categoria $\mathscr{C}$ è inoltre assunta essere *localmente piccola*, ossia, dati $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, la classe dei morfismi $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ di $\mathscr{C}$ è, per definizione, un insieme piccolo.

Date categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ e funtori $F, G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, una trasformazione naturale $\eta\colon F \longrightarrow G$ sarà denotata con $\eta\colon F \Rightarrow G$ oppure con $\eta\colon F \implies G$.

[1] `https://unitn.github.io/grappa/`
[2] Scrivere a marco.vergura at gmail.com

# 1. Qualche domanda di senso.

Siano $\mathcal{X} = (X,\ \tau)$ e $\mathcal{Y} = (Y,\ \sigma)$ due spazi topologici. È d'uso definire il *prodotto di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$* come lo spazio topologico $(X \times Y,\ \tau \prod \sigma)$, dove $\tau \prod \sigma$ è la più piccola topologia sul prodotto cartesiano $X \times Y$ che rende le proiezioni $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ e $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ continue. Analogamente il *coprodotto* (o *unione disgiunta*) *di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$* è tipicamente dichiarato essere lo spazio topologico $(X \sqcup Y,\ \tau \amalg \sigma)$, dove $\tau \amalg \sigma$ è la più grande topologia su $X \sqcup Y$ in grado di rendere entrambe le iniezioni $i_X : X \longrightarrow X \sqcup Y$ e $i_Y : Y \longrightarrow X \sqcup Y$ continue.

Ora, il punto è: "*Perché si devono definire così prodotto e coprodotto* di due spazi topologici? *Per quale ragione* i loro insiemi soggiacenti sono quelli che sono?"

Si potrebbe rispondere, immediatamente, che il motivo risieda semplicemente nella capacità di tali posizioni di soddisfare le necessarie proprietà universali. Nulla da eccepire in tali affermazioni, se non che replicano alle suddette questioni di senso attraverso una risposta a posteriori, giustificando le cause con gli effetti, il che pare un sofismo inaccettabile al matematico aspirante alla gnosi. Si badi bene, inoltre, che la domanda non è affatto banale, dal momento che non c'è alcuna ragione aprioristica o metafisica che giustifichi, ad esempio, la costruzione del coprodotto di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ a partire dall'unione disgiunta degli insiemi soggiacenti a $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Tant'è che, in generale, questa operazione di lifting dell'unione disgiunta tra insiemi non produce il risultato sperato: si pensi ad esempio al coprodotto tra due moduli (sinistri) $M$ e $N$ su un medesimo anello $R$, dato da $M \oplus N$, il cui insieme soggiacente *non* è l'unione disgiunta degli insiemi $M$ e $N$ (per non parlare di ciò che accade nel caso del coprodotto di due anelli).

Ebbene, queste e altre domande illuminanti circa i *motivi* soggiacenti a definizioni e costruzioni varie, trovano risposta come istanze particolari del concetto fondamentale di *aggiunzione*.

# 2. Uno strumento essenziale.

**Definizione 1** (*Aggiunzione.*)**.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie e siano $L\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, $R\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ funtori. Si dice che la coppia $(L, R)$ è un'*aggiunzione* da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ se esiste, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, un isomorfismo di insiemi (biiezione)

$$\varphi_{X,Y} = \varphi(X, Y)\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X),\ Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ R(Y)) \tag{1}$$

naturale in $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$. In tal caso, si dice che $L$ è un *aggiunto sinistro* e che $R$ è un *aggiunto destro*. Si scrive, inoltre, $L \dashv R$ o $\varphi\colon L \dashv R$.

Le proprietà di naturalità in $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ di

$$\varphi = (\varphi_{X,Y})_{(X,Y)\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\times \mathrm{Ob}(\mathscr{D})} \tag{2}$$

richieste nella definizione di aggiunzione sono chiaramente da intendersi come segue: fissati $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ e $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ rispettivamente, le famiglie

$$\varphi_{\bullet,Y} := (\varphi_{X,Y})_{X\in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})} \quad \text{e} \quad \varphi_{X,\bullet} := (\varphi_{X,Y})_{Y\in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})} \tag{3}$$

devono costituire delle trasformazioni naturali

$$\varphi_{\bullet,Y}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(\bullet),\ Y) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet,\ R(Y)) \tag{4}$$

e

$$\varphi_{X,\bullet}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X),\ \bullet) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ R(\bullet)). \tag{5}$$

Qui $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(\bullet),\ Y)$ è il funtore $\mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ dato come composizione

$$\mathscr{C}^{op} \xrightarrow{(L^{op},\ \Delta_Y)} \mathscr{D}^{op} \times \mathscr{D} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\bullet,*)} \mathbf{Set},$$

dove $\Delta_Y$ è il funtore costante in $Y$ che manda ogni oggetto di $\mathscr{C}$ in $Y$ e ogni freccia di $\mathscr{C}$ in $1_Y$, mentre $L^{op}$ è $L$, quando considerato come funtore $\mathscr{C}^{op} \longrightarrow \mathscr{D}^{op}$. Analogamente sono da intendersi i funtori che compaiono in (4) e (5).

Esplicitamente, (4) e (5) si traducono nella richiesta di commutatività, per ogni freccia $k\colon X' \longrightarrow X$ e $h\colon Y \longrightarrow Y'$ di $\mathscr{C}$ e di $\mathscr{D}$ rispettivamente, dei seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X), Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(k){,}1_Y)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, R(Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(k{,}1_{R(Y)})"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X'), Y) \arrow[r, "\varphi_{X',Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', R(Y))
\end{tikzcd} \tag{6}$$

e

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X),Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(1_{L(X)},h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,R(Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,R(h))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X),Y') \arrow[r, "\varphi_{X,Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,R(Y'))
\end{tikzcd}
\tag{7}
$$

rispettivamente per $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ e $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ fissati.

Infine, queste ultime proprietà di commutatività sono a loro volta equivalenti a richiedere che $\varphi$ come in (2) costituisca una trasformazione naturale di bifuntori

$$\varphi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\bullet),*) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet,G(*)),$$

dove i funtori $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\bullet),*)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet,G(*))$ sono definiti nel modo ovvio come composizioni

$$\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D} \xrightarrow{L^{op}\times I_{\mathscr{D}}} \mathscr{D}^{op} \times \mathscr{D} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\bullet,*)} \mathbf{Set}$$

e

$$\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D} \xrightarrow{I_{\mathscr{C}}^{op}\times R} \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet,*)} \mathbf{Set}$$

rispettivamente (con $I_{\mathscr{D}}$ e $I_{\mathscr{C}}$ funtori identici).

Dopo questi eccessi di pedanteria, vogliamo ora cercare di sviscerare le informazioni fornite da un isomorfismo naturale come in (1).

Scegliamo quindi, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $Y = L(X)$ in (1). Allora $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X),\ L(X))$ contiene un elemento privilegiato dato da $1_{L(X)}$. Pertanto, possiamo definire, per tutti gli $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, una freccia in $\mathscr{C}$

$$\eta_X := \varphi_{X,L(X)}(1_{L(X)})\colon X \longrightarrow R(L(X)). \tag{8}$$

Si constata facilmente che in realtà $\eta\colon x \mapsto \eta_x$ è una trasformazione naturale $I_{\mathscr{C}} \Rightarrow R \circ L$. Infatti, per $f\colon X \longrightarrow X'$ freccia in $\mathscr{C}$, ponendo $Y = L(X)$, $Y' = L(X')$ e $h := L(f)$ in (7) e compiendo analoghe scelte accurate in (6), ricaviamo

$$R(L(f)) \circ \eta_X = R(L(f)) \circ \varphi_{X,L(X)}(1_{L(X)}) = \varphi_{X,L(X')}(L(f) \circ 1_{L(X)}) =$$

$$= \varphi_{X,L(X')}(1_{L(X')} \circ L(f)) = \varphi_{X',L(X')}(1_{L(X')}) \circ f = \eta_{X'} \circ f,$$

come richiesto.

Inoltre, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, la coppia $(L(X),\ \eta_X)$ soddisfa la seguente *proprietà universale*:

$$\forall Y' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,R(Y')) \quad \exists!\ f'\colon L(X) \longrightarrow Y \quad (R(f') \circ \eta_X = f), \tag{9}$$

come nel diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
R(L(X)) \arrow[rr, "R(f')"] & & R(Y')
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Infatti, poiché $\varphi_{X,Y'}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X), Y') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, R(Y'))$ è una biiezione, esiste un'unica $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X), Y')$ tale che $\varphi_{X,Y'}(f') = f$. Ma allora, prendendo $Y = L(X)$ e $h = f'$ in (7), otteniamo proprio

$$R(f') \circ \eta_X = R(f') \circ \varphi_{X,L(X)}(1_{L(X)}) = \varphi_{X,Y'}(f') \circ 1_{L(X)} = \varphi_{X,Y'}(f') = f.$$

In generale, fissato $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, una coppia $(Y,\ g\colon X \longrightarrow R(Y))$, dove $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, che soddisfi la proprietà universale (9) (in cui, ovviamente, $L(X)$ è da sostituirsi con $Y$ e $\eta_X$ va cambiato in $g$) è detta *freccia universale da $X$ a $R$*.

Osserviamo anche che $\eta$ caratterizza completamente

$$\varphi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X),\ Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ R(Y)), \tag{11}$$

nel senso che, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ e per tutte le frecce $f\colon L(X) \longrightarrow Y$ in $\mathscr{D}$, la commutatività di (7) implica che

$$\varphi_{X,Y}(f) = R(f) \circ \eta_X. \tag{12}$$

Per quel grazioso gioco di simmetrie che è il principio di dualità, possiamo (e dobbiamo) considerare la costruzione speculare a quella appena compiuta. Se $L \dashv R$ attraverso l'isomorfismo naturale $\varphi$ come in (11), possiamo considerare, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, la freccia di $\mathscr{D}$ definita come

$$\varepsilon_Y := \varphi^{-1}_{X,Y}(1_{R(Y)})\colon L(R(Y)) \longrightarrow Y. \tag{13}$$

Analogamente a quanto visto prima, $\varepsilon\colon Y \mapsto \varepsilon_Y$ costituisce una trasformazione naturale $L \circ R \Rightarrow I_{\mathscr{D}}$ e, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, la coppia $(R(Y),\ \varepsilon_Y)$ soddisfa la seguente *proprietà universale*:

$$\forall X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X'), Y) \quad \exists!\ f'\colon X' \longrightarrow R(Y) \quad (\varepsilon_Y \circ L(f') = f). \tag{14}$$

Chiamiamo, con ovvie definizioni e per un fissato $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, una coppia come $(R(Y),\ \varepsilon_Y)$, una *freccia universale da $L$ a $Y$*. Inoltre, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, comunque presa una freccia $g\colon X \longrightarrow R(Y)$ in $\mathscr{C}$, abbiamo

$$\varphi^{-1}_{X,Y}(g) = \varepsilon_Y \circ L(g). \tag{15}$$

Notiamo infine che, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, scegliendo $X = R(Y)$ e $f = \varepsilon_Y$ in (12), ricaviamo

$$1_{R(Y)} = \varphi_{R(Y),Y}(\varepsilon_Y) = R(\varepsilon_Y) \circ \eta_{R(Y)}.$$

Riassumiamo quanto visto nella seguente

**Proposizione 1.** *Sia $L \dashv R$ un'aggiunzione con isomorfismo naturale $\varphi$ come in* (1)*. Allora:*

1. *esiste una trasformazione naturale $\eta\colon I_{\mathscr{C}} \Rightarrow R \circ L$ tale che, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\eta_X$ è una freccia universale da $X$ a $R$ verificante (12);*

2. *esiste una trasformazione naturale $\varepsilon\colon L \circ R \Rightarrow I_{\mathscr{D}}$ tale che, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, $\varepsilon_Y$ è una freccia universale da $L$ a $Y$ e vale (15).*

*Inoltre, se definiamo le funzioni $\eta_R\colon Y \mapsto \eta_{R(Y)}$ e $R\varepsilon\colon Y \mapsto R(\varepsilon_Y)$ da $\mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ in $\mathrm{Ar}(\mathscr{C})$ e analogamente per $L\eta$ e $\varepsilon_L$, otteniamo che esse costituiscono delle trasformazioni naturali, come nei diagrammi (in cui $RLR := R \circ L \circ R$ e analogamente per $LRL$)*

$$R \xrightarrow{\eta_R} RLR \xrightarrow{R\varepsilon} R \qquad\qquad L \xrightarrow{L\eta} LRL \xrightarrow{\varepsilon_L} L.$$

*Infine, le composizioni $R\varepsilon \circ \eta_R$ e $\varepsilon_L \circ L\varepsilon$ sono le trasformazioni identiche di $R$ e di $L$, $1_R$ e $1_L$, rispettivamente.*

**Definizione 2** (*Unità e Counità.*)**.** Sia $\varphi\colon L \dashv R$ un'aggiunzione. Le trasformazioni naturali $\eta$ e $\varepsilon$ definite da (8) e (13) rispettivamente, sono dette *unità* e *counità* dell'aggiunzione.

**Teorema 1.** *Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie. Un'aggiunzione $L \dashv R$ da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ è completamente determinata dai dati elencati in uno qualunque dei due punti seguenti:*

*(i) una coppia di funtori $\mathscr{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ e una trasformazione naturale $\eta\colon I_{\mathscr{C}} \Rightarrow R \circ L$ tale che ogni componente $\eta_X$ sia una freccia universale da $X$ a $R$. In tal caso $\varphi$ è determinata come in* (12)*;*

*(ii) una coppia di funtori $\mathscr{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ e una trasformazione naturale $\varepsilon\colon L \circ R \Rightarrow I_{\mathscr{D}}$ tale che ogni componente $\varepsilon_Y$ sia una freccia universale da $L$ ad $Y$. In questo caso otteniamo $\varphi^{-1}$ definendola tramite l'uguaglianza* (15)*.*

*Dimostrazione.* Proviamo solo il primo punto, perché il secondo segue con un argomento duale. Poiché $\eta_X$ è freccia universale da $X$ a $R$, per ogni oggetto $X$ di $\mathscr{C}$ e ogni freccia $f\colon X \to R(Y)$, esiste ed è unico un morfismo $g\colon L(X) \to Y$ tale che $f = R(g) \circ \eta_X$. Ciò significa esattamente che l'assegnazione $g \mapsto R(g) \circ \eta_X$ definisce una biiezione

$$\vartheta_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X), Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, R(Y)).$$

La naturalità di $\eta$ in $X$ e la funtorialità di $R$ garantiscono che la mappa

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) \ni (X, Y) \mapsto \vartheta_{X,Y}$$

definisca una trasformazione naturale da $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(\bullet), *)$ a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, R(*))$, la quale determina quindi un'aggiunzione $L \dashv R$. Nel caso in cui $\eta$ sia l'unità di una qualche aggiunzione $\varphi\colon L \dashv R$ già data, allora la $\vartheta$ sopra definita coincide con $\varphi$. $\square$

**Osservazione 1.** Unità e counità ci forniscono una sorta di spiegazione intuitiva al concetto di aggiunzione. Siano infatti $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie e supponiamo di avere funtori $\mathscr{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ .

(i) Se $L$ e $R$ determinano un *isomorfismo* di categorie, allora

$$L \circ R = I_{\mathscr{D}} \qquad \text{e} \qquad I_{\mathscr{C}} = R \circ L.$$

(ii) Se $L$ e $R$ determinano un'*equivalenza* di categorie, allora

$$L \circ R \simeq I_{\mathscr{D}} \qquad \text{e} \qquad I_{\mathscr{C}} \simeq R \circ L,$$

per opportuni isomorfismi naturali che sostituiscono le uguaglianze presenti nel caso dell'isomorfismo tra categorie.

(iii) Se $L$ e $R$ determinano un'*aggiunzione* di categorie, allora

$$L \circ R \Rightarrow I_{\mathscr{D}} \qquad \text{e} \qquad I_{\mathscr{C}} \Rightarrow R \circ L$$

e queste trasformazioni naturali soddisfano le opportune condizioni (*di compatibilità*) viste sopra, sostituendosi agli isomorfismi naturali del caso precedente.

Dunque, in qualche senso, un'aggiunzione è pensabile come il modo meno rigido che si possiede per relazionare coerentemente due categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ attraverso due funtori $L$ e $R$.

Vedremo molti esempi di aggiunzioni nella prossima sezione. Ne diamo comunque uno qui che ci tornerà utile in seguito.

**Esempio 1.** È noto ad ogni studente di matematica fin dagli albori della sua carriera universitaria che, dati $X,\ Y,\ Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$, vi è una biiezione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X \times Y,\ Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,\ Z^Y) \overset{def}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y,\ Z)) \tag{16}$$

ed è un esercizio mentale notare che tale biiezione è naturale in tutte le variabili. In particolare, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$, il funtore

$$- \times Y \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) \ni X \mapsto X \times Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$$

ha un aggiunto destro

$$(-)^Y = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y,\ -) \colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

In tale aggiunzione, la counità è data, per ogni $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$, dalla *mappa di valutazione*

$$e_{Y,Z} \colon Z^Y \times Y \longrightarrow Y, \qquad (f, y) \mapsto f(y).$$

In generale, diamo la seguente

**Definizione 3** (*Categoria cartesiana chiusa.*)**.** Sia $\mathscr{C}$ una categoria dotata di prodotti binari arbitrari. Se per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, il funtore

$$- \times Y \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$$

ammette un aggiunto destro

$$(-)^Y \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C},$$

si dice che $\mathscr{C}$ è una categoria *cartesiana chiusa.* Per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, la counità

$$(-)^Y \times Y \Rightarrow I_{\mathscr{C}}$$

è detta *(mappa di) valutazione in* $Y$.

Pertanto, **Set** è una categoria cartesiana chiusa.

Gli aggiunti per uno stesso funtore sono essenzialmente unici.

**Proposizione 2.** *Sia $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un funtore. Se $R$ e $R'$ (rispettivamente, $L$ e $L'$) sono entrambi aggiunti destri (rispettivamente, aggiunti sinistri) di $F$, allora $R \simeq R'$ (rispettivamente, $L \simeq L'$) per un (unico) isomorfismo naturale di funtori.*

*Dimostrazione.* Mostriamo il caso degli aggiunti destri. Per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, abbiamo, per ipotesi, isomorfismi naturali

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, R(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, R'(Y)).$$

Per il lemma di Yoneda, $R(Y)$ è isomorfo a $R'(Y)$ e tale isomorfismo è naturale in $Y$. □

**Osservazione 2.** In virtù della proposizione precedente, dato un funtore $F\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, possiamo parlare, coscientemente e ragionando a meno di isomorfismo, de *l*'aggiunto sinistro di $F$ (nel caso esista) e de *l*'aggiunto destro di $F$ (nel caso esista).

Per dare risposta alle nostre domande iniziali su prodotti e coprodotti (binari) di spazi topologici, abbiamo bisogno della prossima

**Proposizione 3.** *Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ categorie e $G\colon \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ un funtore. Se $G$ ha un aggiunto sinistro (quindi se è un aggiunto destro), allora $G$ preserva (o commuta con) tutti i limiti che esistono in $\mathscr{D}$, i.e. se $T\colon \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{D}$ ha cono limite $\tau\colon \varprojlim T \Rightarrow T$ in $\mathscr{D}$, allora $GT := G \circ T$ ha cono limite $G\tau\colon G(\varprojlim T) \Rightarrow GT$ in $\mathscr{C}$.*
*Dualmente, se $G$ ha un aggiunto destro (quindi se è un aggiunto sinistro), allora $G$ preserva tutti i colimiti che esistono in $\mathscr{D}$.*

*Dimostrazione.* Per composizione, $G\tau$ è sicuramente un cono dal vertice $G(\varprojlim T)$ a $GT$. Siano dunque $L$ un aggiunto sinistro a $G$ e $\varphi$ l'isomorfismo di aggiunzione. Consideriamo un cono $\sigma\colon X \longrightarrow GT$ in $\mathscr{C}$ e, per ogni $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{J})$, poniamo $\sigma_i^\flat(\sigma_i) := \varphi^{-1}_{X,T(i)}\colon L(X) \longrightarrow T(i)$. Allora $\sigma^\flat = (\sigma_i^\flat)_{i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{J})}$ forma un cono $\sigma^\flat\colon L(X) \Rightarrow T$ e, per proprietà universale del cono limite $\tau$, esiste un'unica freccia $h\colon L(X) \longrightarrow \varprojlim T$ tale che, per ogni $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{J})$, $(\tau_i \circ h) = \sigma_i^\flat$. Pertanto, otteniamo un'unica freccia $h^\sharp := \varphi_{X,Y}(h)\colon X \longrightarrow G(\varprojlim T)$ tale che, per ogni $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{J})$, $G(\tau_j) \circ h^\sharp = (\tau_i \circ h)^\sharp = (\sigma_i^\flat)^\sharp = \sigma_i$. L'unicità della freccia $h^\sharp$ dice esattamente che $G\tau$ è cono limite per $T$. □

Ora, lo slogan è, per dirla con MacLane (cfr. [McL], Note alla fine del quarto capitolo):

*"Adjoints occur almost everywhere in Mathematics."*

Questa ubiquità non risparmia ovviamente nemmeno la Topologia.

# 3. Il topologo categorista.

Passiamo quindi, infine, a studiare alcuni esempi concreti di aggiunzioni in Topologia e a vedere come il linguaggio categoriale possa illuminare e semplificare ragionamenti e costruzioni anche in questa materia. L'elenco presentato non sarà ovviamente esaustivo e il lettore è invitato a completarlo come meglio ritenga opportuno.

Di seguito, **Top** indicherà la categoria degli spazi topologici (piccoli) e delle funzioni continue tra di essi.

1. Consideriamo il funtore dimenticante

$$F\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

che ad ogni spazio topologico $(X,\ \tau)$ associa l'insieme soggiacente $X$ e ad ogni funzione continua $f\colon (X,\ \tau) \longrightarrow (Y,\ \sigma)$ associa se stessa, come funzione $f\colon X \longrightarrow Y$. Vogliamo mostrare che $F$ ha sia un aggiunto destro che un aggiunto sinistro.

Un funtore $R\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Top}$ che sia aggiunto destro di $F$ deve assegnare ad ogni insieme $Y$ uno spazio topologico $R(Y)$ in modo tale che, per ogni $\mathcal{X} = (X,\ \tau) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$, si abbia un isomorfismo naturale (in $\mathcal{X}$ e in $Y$)

$$\varphi_{\mathcal{X},Y}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X = F(\mathcal{X}),\ Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{X},\ R(Y)), \tag{17}$$

ossia ogni mappa insiemistica da $X$ a $Y$ deve corrispondere ad un'unica funzione continua da $\mathcal{X}$ a $R(Y)$. Conosciamo una topologia $\sigma$ su $Y$ tale che $R(Y) := (Y,\ \sigma)$ soddisfi questa proprietà? Ovviamente sì, è la topologia banale su $Y$, la quale, dato un qualsiasi spazio topologico $\mathcal{X} = (X,\ \tau)$, rende ogni funzione insiemistica $X \longrightarrow Y$ continua. Pertanto, il funtore $R\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Top}$ definito ponendo, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ e ogni funzione $f\colon Y \longrightarrow Y'$,

$$R(Y) := (Y,\ \{\emptyset,\ Y\}) \quad \text{e} \quad \mathrm{R}(f) := f\colon (Y,\ \{\emptyset,\ Y\}) \longrightarrow (Y',\ \{\emptyset,\ Y'\}),$$

soddisfa (17) dove $\varphi_{\mathcal{X},Y}$ è l'identità (la quale è ovviamente naturale in $\mathcal{X}$ e in $Y$). Possiamo quindi dire, con un lieve abuso di linguaggio, che *il funtore "topologia banale" è l'aggiunto destro del funtore smemorato* **Top** $\longrightarrow$ **Set**.

Similmente, un aggiunto sinistro $L\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Top}$ a $F$ deve essere tale che vi sia, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ e ogni $\mathcal{Y} = (Y,\ \sigma) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$, un isomorfismo naturale in $X$ e in $\mathcal{Y}$:

$$\varphi_{X,\mathcal{Y}}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(L(X),\ \mathcal{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,\ Y = F(\mathcal{Y})). \tag{18}$$

Dunque $L(X)$ deve permettere ad ogni funzione $X \longrightarrow Y = F(\mathcal{Y})$ di essere una funzione continua $L(X) \longrightarrow \mathcal{Y}$. Appare perciò evidente che (18) è soddisfatto per

$\varphi_{X,\mathcal{Y}}$ dato dall'identità, se dotiamo $X$ della topologia discreta, ossia se definiamo $L$ ponendo, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ e ogni funzione $f\colon X \longrightarrow X'$,

$$L(X) := (X,\ \mathcal{P}(X)) \quad \text{e} \quad L(f) := f\colon (X,\ \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X',\ \mathcal{P}(X')).$$

Pertanto, *il funtore "topologia discreta" è l'aggiunto sinistro del funtore dimenticante* $\mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$.

**Osservazione 3.** L'esistenza di aggiunti destri e sinistri al funtore dimenticante $F\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ permette di rispondere alle nostre domande di senso poste nella prima sezione. Infatti, grazie alla Proposizione 3, $F$ è costretto a preservare tutti i limiti e i colimiti che esistono in **Top** e quindi, in particolare, deve commutare con i prodotti e i coprodotti (binari) di **Top**. Ciò significa che, dati due spazi topologici $\mathcal{X} = (X,\ \tau)$ e $\mathcal{Y} = (Y,\ \sigma)$, *se* il prodotto

$$(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, p_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X},\ p_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y})$$

o il coprodotto

$$(\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y},\ i_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y},\ i_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X} \amalg \mathcal{Y})$$

di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ esistono, *allora* si deve avere

$$F(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = X \times Y, \quad F(p_{\mathcal{X}}) = p_X\colon X \times Y \longrightarrow X, \quad F(p_{\mathcal{Y}}) = p_Y\colon X \times Y \longrightarrow Y$$

e

$$F(\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}) = X \sqcup Y, \quad F(i_{\mathcal{X}}) = i_X\colon X \longrightarrow X \sqcup Y, \quad F(i_{\mathcal{Y}}) = i_Y\colon Y \longrightarrow X \sqcup Y.$$

Perciò $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (rispettivamente $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$) *deve* avere (a meno di isomorfismo) come insieme soggiacente $X \times Y$ (rispettivamente $X \sqcup Y$) ed essere dotato di una topologia tale da rendere entrambe le proiezioni sui fattori (rispettivamente le inclusioni degli addendi) continue e da soddisfare la necessaria proprietà universale. Ne segue che le topologie su $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ e su $\mathcal{X} \amalg \mathcal{Y}$ *devono* essere quelle che sono usualmente loro assegnate ed il motivo di tale assegnazione risulta ora evidente.

**Osservazione 4.** Questo esempio permette di spiegare una delle interpretazioni filosofiche, per così dire, che a volte sono date ai funtori aggiunti, i quali possono essere pensati come *inversi concettuali* (si veda [Stf]).

Il funtore smemorato $F\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ infatti scorda da un lato la struttura topologica su un insieme e, dall'altro, la proprietà di continuità di funzioni tra spazi topologici. Ora, qual è l'inversa concettuale dell'operazione di ignorare la topologia su un insieme per considerare soltanto l'insieme stesso? Si tratta della costruzione di uno spazio topologico a partire da un insieme $X$, basandosi solamente sulla nozione di spazio topologico (ossia, sugli assiomi di topologia) e sul fatto di disporre di un insieme generico qualsiasi, senza alcuna specificità ulteriore e senza sfruttare alcuna eventuale proprietà dello stesso (per esempio l'essere finito o meno, l'avere una certa cardinalità o quant'altro). Chiaramente, ci sono due modi complementari di realizzare tale scopo: il primo, *minimale*, equipaggia ogni insieme con la topologia banale, quella inessenziale, la più piccola ammessa dagli assiomi; il secondo, *massimale*, dota ogni insieme della topologia discreta, la più fine concessa dagli assiomi. Tali modalità di realizzazione *libera* (nel senso di *assoluta*, scevra di legami, se non quelli imposti dagli assiomi della teoria stessa) di uno spazio topologico a partire da un insieme, essendo funtoriali, corrispondono dunque all'aggiunto destro e sinistro di $F$.

Per il prossimo esempio, necessitiamo di un'innocua definizione di carattere generale.

**Definizione 4** (*Categoria slice. Categoria coslice*)**.** Sia $\mathscr{C}$ una categoria e sia $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(i) La *categoria (slice) su* (o *sopra*) $X$ (anche detta *categoria (degli oggetti) sopra* $X$) è la categoria $(\mathscr{C} \downarrow X)$ (anche denotata $\mathscr{C}/X$) definita come segue.

- Un oggetto di $(\mathscr{C} \downarrow X)$ è una coppia ordinata $(X',\ f\colon X' \longrightarrow X)$, dove $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $f$ è una freccia in $\mathscr{C}$ da $X'$ a $X$.
- Una freccia $(X',\ f\colon X' \longrightarrow X) \longrightarrow (X'', f'\colon X'' \longrightarrow X)$ in $(\mathscr{C} \downarrow X)$ è una freccia $g\colon X' \longrightarrow X''$ di $\mathscr{C}$ tale che commuti il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X'' \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Per semplicità notazionale, un oggetto $(X',\ f\colon X' \longrightarrow X)$ di $(\mathscr{C} \downarrow X)$ è usualmente indicato soltanto con $f\colon X' \longrightarrow X$.

(ii) La *categoria (coslice) sotto* $X$ (anche detta *categoria (degli oggetti) sotto* $X$) è la categoria $(X \downarrow \mathscr{C})$ (anche denotata $X/\mathscr{C}$) definita come segue.

- Un oggetto di $(X \downarrow \mathscr{C})$ è una coppia ordinata $(X', g\colon X \longrightarrow X')$, dove $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ e $g$ è una freccia in $\mathscr{C}$ da $X$ a $X'$.
- Una freccia $(X',\ g\colon X \longrightarrow X') \longrightarrow (X'', g'\colon X \longrightarrow X'')$ in $(X \downarrow \mathscr{C})$ è una freccia $f\colon X' \longrightarrow X''$ di $\mathscr{C}$ tale che commuti il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ X' \arrow[rr, "f"'] & & X'' \end{tikzcd}$$

Anche in questo caso, per semplicità, un oggetto $(X',\ g\colon X \longrightarrow X')$ di $(X \downarrow \mathscr{C})$ è spesso indicato semplicemente con $g\colon X \longrightarrow X'$.

2. Sia $\mathcal{X}$ uno spazio topologico fissato e sia $F\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ il funtore dimenticante, come al punto precedente. Allora abbiamo un funtore indotto

$$(F \downarrow \mathcal{X})\colon (\mathbf{Top} \downarrow \mathcal{X}) \longrightarrow (\mathbf{Set} \downarrow F(\mathcal{X}))$$

tale che:

- se $f\colon \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$ è un oggetto di $(\mathbf{Top} \downarrow \mathcal{X})$, allora $(F \downarrow \mathcal{X})(f)$ è dato da $F(f)\colon F(\mathcal{X}') \longrightarrow F(\mathcal{X})$;
- se $g\colon f \longrightarrow f'$ è una freccia in $(\mathbf{Top} \downarrow \mathcal{X})$ (con $f'\colon \mathcal{X}'' \longrightarrow \mathcal{X}$), allora $(F \downarrow \mathcal{X})(g)$ è dato da $F(g)\colon F(\mathcal{X}') \longrightarrow F(\mathcal{X}'')$.

Questo funtore $(F \downarrow \mathcal{X})$ ammette un aggiunto destro $R$. Sia infatti $t\colon S \longrightarrow F(\mathcal{X})$ un oggetto di $(\mathbf{Set} \downarrow F(\mathcal{X}))$ e consideriamo su $S$ la topologia $\tau_t$ che ha per base gli insiemi $t^{-1}(U)$, dove $U$ è un aperto di $\mathcal{X}$. Osserviamo che, chiaramente, $t$ è una funzione continua $(S,\ \tau_t) \longrightarrow \mathcal{X}$ e poniamo perciò

$$R(t) := (t\colon (S,\ \tau_t) \longrightarrow \mathcal{X}).$$

Siano a questo punto $t\colon S \longrightarrow F(\mathcal{X})$ e $t'\colon S' \longrightarrow F(\mathcal{X})$ oggetti di $(\mathbf{Set} \downarrow F(\mathcal{X}))$ e sia $h\colon S \longrightarrow S'$ una freccia $t \longrightarrow t'$ in $(\mathbf{Set} \downarrow F(\mathcal{X}))$. Per definizione, $t' \circ h = t$ e ciò implica evidentemente che $h$ è una funzione continua $(S,\ \tau_t) \longrightarrow (S',\ \tau_{t'})$. Pertanto possiamo definire

$$R(h) := h\colon R(t) \longrightarrow R(t').$$

Osserviamo che, per un oggetto $t\colon S \longrightarrow F(\mathcal{X})$ nella categoria sopra $F(\mathcal{X})$, la topologia $(S,\ \tau_t)$ soddisfa la seguente proprietà universale: se $f\colon \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ è una mappa continua di spazi topologici tale che esista una funzione tra insiemi $s\colon F(\mathcal{Y}) \longrightarrow S$ verificante $F(f) = t \circ s$, allora $s$ è una mappa continua $\mathcal{Y} \longrightarrow (S, \tau_t)$. Ne segue chiaramente che, per ogni $f \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top} \downarrow \mathcal{X})$ e ogni $t \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set} \downarrow F(\mathcal{X}))$, vi è un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}\downarrow F(\mathcal{X}))}(F(f),\ t) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Top}\downarrow \mathcal{X})}(f,\ R(t)),$$

dato dall'identità, ossia abbiamo l'annunciata aggiunzione $F \dashv R$. Notare che, in realtà, $R$ è in questo caso un inverso destro di $F \downarrow \mathcal{X}$, nel senso che

$$(F \downarrow \mathcal{X}) \circ R = I_{(\mathbf{Set}\downarrow F(\mathcal{X}))},$$

ossia, la counità dell'aggiunzione è la trasformazione naturale data dall'identità.

**Osservazione 5.** Nel caso in cui $S \subseteq F(\mathcal{X})$, detta $i$ l'inclusione $S \hookrightarrow F(\mathcal{X})$, $\tau_i$ è l'usuale topologia di sottospazio per $S$ e $R(i)$ è $i$ stessa, pensata come funzione continua $(S,\ \tau_i) \longrightarrow \mathcal{X}$.

Senza stupore alcuno, possiamo considerare anche il sollevamento del funtore dimenticante $F\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ alla categoria coslice $(\mathcal{X} \downarrow \mathbf{Top})$. Precisamente, abbiamo un funtore

$$(\mathcal{X} \downarrow F)\colon (\mathcal{X} \downarrow \mathbf{Top}) \longrightarrow (F(\mathcal{X}) \downarrow \mathbf{Set})$$

che manda un oggetto $g\colon X \longrightarrow \mathcal{Y}$ di $(\mathcal{X} \downarrow \mathbf{Top})$ in $(F(g)\colon F(\mathcal{X}) \longrightarrow F(\mathcal{Y})) \in \mathrm{Ob}(F(\mathcal{X}) \downarrow \mathbf{Set})$ e agisce nel modo ovvio sulle frecce. Tale funtore ha un aggiunto sinistro $L$. Sia infatti $t\colon F(\mathcal{X}) \longrightarrow S$ un oggetto di $(F(\mathcal{X}) \downarrow \mathbf{Set})$ e dotiamo $S$ della topologia $\sigma_t$ che ha per base i sottoinsiemi $V \subseteq S$ tali che $t^{-1}(V)$ è un aperto di $\mathcal{X}$. Evidentemente, $t$ diventa così una funzione continua $\mathcal{X} \longrightarrow (S,\ \sigma_t)$ e possiamo porre

$$L(t) := (t\colon \mathcal{X} \longrightarrow (S,\ \sigma_t)).$$

Chiaramente, se $h\colon t \longrightarrow t'$ è una freccia in $(\mathcal{X} \downarrow F)$ (con $t'\colon \mathcal{X} \longrightarrow S'$), allora $h$ è una funzione continua $(S,\ \sigma_t) \longrightarrow (S',\ \sigma_{t'})$ e non ci resta che definire

$$L(h) := (h\colon L(t) \longrightarrow L(t')).$$

Ancora una volta, $L(t) = t\colon \mathcal{X} \longrightarrow (S,\ \sigma_t)$ gode della seguente proprietà universale: se $f\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ è una funzione continua tale che, per qualche $k$ e qualche $t$, commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd} & F(\mathcal{X}) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "F(f)"] & \\ S \arrow[rr, "k"'] & & F(\mathcal{Y}) \end{tikzcd}$$

allora $k$ è una funzione continua $(S,\ \sigma_t) \longrightarrow \mathcal{Y}$. Ciò dice precisamente che l'identità costituisce un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{(\mathcal{X}\downarrow\mathbf{Top})}(R(t),\ f) \simeq \mathrm{Hom}_{(F(\mathcal{X})\downarrow\mathbf{Set})}(t,\ F(f))$$

fornendo l'aggiunzione $L \dashv (\mathcal{X} \downarrow F)$, in cui l'unità è la trasformazione naturale data dall'identità, così che $I_{(X\downarrow\mathbf{Top})} = (\mathcal{X} \downarrow F) \circ L$.

**Osservazione 6.** Se $t\colon F(\mathcal{X}) \longrightarrow S$ è una mappa suriettiva, allora $(S,\ \sigma_t)$ è l'usuale topologia quoziente su $S$ rispetto a $t$ e $L(t)$ è la proiezione al quoziente.

I prossimi esempi che vedremo rientrano in una fondamentale famiglia di aggiunzioni, la cui importanza e vastità fa meritare loro un nome specifico.

**Definizione 5** (*Sottocategoria (Co)riflessiva*)**.** Sia $\mathscr{C}$ una sottocategoria piena di una categoria $\mathscr{D}$ e sia $i\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ il funtore inclusione. Si dice che $\mathscr{C}$ è una *sottocategoria riflessiva* di $\mathscr{D}$ se $i$ ammette un aggiunto sinistro $T$,

$$(T \dashv i)\colon\ \mathscr{D} \underset{i}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathscr{C}\ .$$

Un tale $T$ è detto *riflettore*.

Dualmente, si dice che $\mathscr{C}$ è una *sottocategoria coriflessiva* di $\mathscr{D}$ se $i$ ammette un aggiunto destro $R$,

$$(i \dashv R)\colon\ \mathscr{C} \underset{R}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}\ .$$

Un siffatto $R$ è detto *coriflettore*.

**Osservazione 7.** Si può dimostrare (si veda [McL] §IV.3) che se $\mathscr{C}$ è una sottocategoria riflessiva di $\mathscr{D}$ e $T$ è l'aggiunto sinistro del funtore inclusione, allora, per ogni $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, la counità $\varepsilon_X$ dell'aggiunzione è un isomorfismo, i.e. $T(i(X)) \simeq X$.

3. Sia **CHaus** la sottocategoria piena di **Top** data dagli spazi topologici compatti e di Hausdorff e denotiamo, come sopra, con $i$ il funtore inclusione **CHaus** $\longrightarrow$ **Top**. Vogliamo mostrare che **CHaus** è una sottocategoria riflessiva di **Top**, trovando un aggiunto sinistro a $i$.

   Per il Teorema 1, trovare un'aggiunzione in cui $i$ faccia da aggiunto destro è equivalente a reperire un funtore $\beta\colon \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{CHaus}$ e una trasformazione naturale $\eta\colon I_{\mathbf{Top}} \longrightarrow i \circ L$ tale che, per ogni $\mathcal{X} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$, per tutti gli $\mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$ e per ogni $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{X},\ i(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y})$, esista un'unica $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CHaus}}(\beta(\mathcal{X}),\ \mathcal{Y})$ tale che

$$i(g) \circ \eta_{\mathcal{X}} = (g \circ \eta_{\mathcal{X}} =) f,$$

come nel diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
i(\beta(X)) = \beta(\mathcal{X}) \arrow[rr, "i(g)=g"] & & i(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}
\end{tikzcd} \tag{19}$$

Nel contesto classico della Topologia Generale, si conosce un modo essenzialmente unico di associare ad uno spazio topologico uno spazio compatto e di Hausdorff con questa peculiarità. Infatti, fissato un qualsiasi spazio topologico $\mathcal{X}$, se scegliamo come $\beta(\mathcal{X})$ la compattificazione di Stone-Čech di $\mathcal{X}$ e prendiamo per $\eta_{\mathcal{X}}$ la mappa canonica $\mathcal{X} \longrightarrow \beta(\mathcal{X})$, la proprietà universale di cui sopra risulta soddisfatta. Poiché la costruzione della compattificazione di Stone-Čech è notoriamente funtoriale, possiamo affermare che *il funtore "compattificazione di Stone-Čech" è l'aggiunto sinistro dell'inclusione di* **CHaus** *in* **Top** e, ovviamente, tale caratterizzazione determina completamente (a meno di omeomorfismo) la compattificazione stessa.

Il nostro intento è quello di mostrare che, in realtà, è possibile trovare un aggiunto sinistro ad $i\colon \mathbf{CHaus} \longrightarrow \mathbf{Top}$ applicando un teorema di Teoria delle Categorie, valido in un contesto del tutto generale e che fornisce agilmente l'esistenza del cercato riflettore.

Il risultato che intendiamo utilizzare ha come possibile punto di partenza la Proposizione 3, la quale afferma che *se* un funtore $G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ ha un aggiunto sinistro, *allora* preserva tutti i limiti (piccoli) che esistono nel suo dominio. In generale, l'implicazione non è reversibile: il lettore è invitato a trovare opportuni, personali, controesempi. L'ostacolo principale è dovuto anzitutto al fatto che la caratteristica di preservare i limiti per un funtore $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ potrebbe essere meno peculiare ed informativa di quanto possa apparire, nella disgraziata eventualità in cui il dominio $\mathscr{C}$ non ammetta abbastanza limiti (si pensi ad un caso estremo come quello di una categoria $\mathscr{C}$ in cui le uniche frecce siano date dalle identità sui vari oggetti). Una domanda sorge quindi piuttosto spontanea:[3]

*"Data una categoria completa $\mathscr{C}$ e un funtore $G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ che preservi tutti i limiti (piccoli), esistono delle condizioni sufficienti su $G$ affinché esso ammetta un aggiunto sinistro?"*

La risposta è affermativa ed è data da un importante teorema dovuto a Peter J. Freyd:

[3]Ricordiamo che una categoria $\mathscr{C}$ si dice *completa* se ogni funtore $F\colon\ \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$, dove $\mathscr{J}$ è una categoria piccola, ha un limite (in $\mathscr{C}$).

**Teorema 2** ((General) Adjoint Functor Theorem (GAFT))**.** *Sia $\mathscr{C}$ una categoria completa e sia $\mathscr{D}$ una categoria qualsiasi.*[4] *Un funtore $G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ ammette un aggiunto sinistro se e soltanto se preserva tutti i limiti piccoli (di $\mathscr{C}$) e soddisfa la seguente*

Solution Set Condition (SSC). *Per ogni oggetto $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, esistono un insieme piccolo $I$ e una famiglia di frecce $(f_i\colon Y \longrightarrow G(X_i))_{i\in I}$ di $\mathscr{D}$ indiciata su $I$, tali che ogni altra freccia $h\colon Y \longrightarrow G(X)$ di $\mathscr{D}$ fattorizzi come $h = G(t) \circ f_i$, per qualche indice $i \in I$ e qualche freccia $t\colon X_i \longrightarrow X$ di $\mathscr{C}$.*

Non proveremo qui questo teorema, non già perché la sua dimostrazione sia particolarmente difficoltosa, bensì in quanto necessitante di alcuni risultati accessori che rischierebbero di allontanare lo sguardo dal focus della questione; il lettore interessato è caldamente invitato a consultare [McL] §V.6 oppure [Bor1] §3.3. Ci limitiamo a fornire una (molto abbozzata) idea per una possibile dimostrazione (conservando le stesse notazioni dell'enunciato del Teorema):

– si osserva che il problema di costruire un'aggiunzione $\varphi\colon L \dashv G$ è equivalente a quello di trovare, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, una freccia universale $Y \longrightarrow G(X)$ da $Y$ a $G$ (per qualche $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$);

– si nota che, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, una freccia universale da $Y$ a $G$ è precisamente un oggetto iniziale nella categoria $(Y \downarrow G)$ i cui oggetti sono le coppie $(X,\ Y \longrightarrow G(X))$, per qualche $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, e i morfismi

$$g\colon (X,\ f\colon Y \longrightarrow G(X)) \longrightarrow (X',\ f'\colon Y \longrightarrow G(X'))$$

sono le frecce $g\colon X \longrightarrow X'$ di $\mathscr{C}$ tali che $G(g) \circ f = f'$;

– poiché $G$ preserva i limiti (piccoli) e $\mathscr{C}$ è completa, anche $(Y \downarrow G)$ lo è (esiste un naturale funtore di proiezione

$$Q\colon (Y \downarrow G) \longrightarrow \mathscr{C}, \qquad \mathrm{Ob}(Y \downarrow G) \ni (X,\ f) \mapsto X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}),$$

il quale crea tutti i limiti piccoli, sotto le ipotesi date);

– la SSC per $G$ si traduce nella seguente proprietà di $\mathscr{B} := (Y \downarrow G)$:

*"Esistono un insieme piccolo $I$ e una famiglia $(K_i)_{i\in I}$ di oggetti di $\mathscr{B}$ tali che, per ogni $B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B})$, esiste una freccia $K_i \longrightarrow B$, per qualche $i \in I$";* (†)

– si mostra che, per una categoria completa $\mathscr{B}$, l'esistenza di un oggetto iniziale è equivalente alla validità in $\mathscr{B}$ di (†), il che permette di concludere, prendendo $\mathscr{B} = (Y \downarrow G)$.

**Osservazione 8.** Notiamo che, se $G\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ ha un aggiunto sinistro $L$, allora la SSC per $G$ è chiaramente soddisfatta: basta prendere, per ogni $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, $I = \{0\}$ e un'unica freccia $\eta_Y\colon Y \longrightarrow G(L(Y))$.

Possiamo finalmente utilizzare GAFT per provare la tanto agognata

[4]Ricordiamo che, in questa trattazione, tutte le categorie considerate sono, per definzione, *localmente piccole*, ossia, se $X,\ Y$ sono oggetti di una categoria $\mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ Y)$ è un insieme piccolo.

**Proposizione 4.** *Il funtore inclusione* $i\colon \mathbf{CHaus} \longrightarrow \mathbf{Top}$ *ammette un aggiunto sinistro, ossia* $\mathbf{CHaus}$ *è una sottocategoria riflessiva di* $\mathbf{Top}$.

*Dimostrazione.* Verifichiamo le ipotesi del Teorema 2. Dobbiamo anzitutto provare che $\mathbf{CHaus}$ è completa. Sappiamo che a tal fine è sufficiente mostrare che ogni insieme piccolo di oggetti di $\mathbf{CHaus}$ ammette un prodotto (in $\mathbf{CHaus}$) e ogni coppia di frecce $f$ e $g$ di $\mathbf{CHaus}$ aventi dominio e codominio comuni ammette un equalizzatore (in $\mathbf{CHaus}$). Validiamo queste proprietà separatamente.

- Sia $(\mathcal{X}_i)_{i\in I}$ un insieme piccolo di spazi topologici compatti e di Hausdorff. Possiamo considerare $(i(\mathcal{X}_i) = \mathcal{X}_i)_{i\in I}$ come una famiglia di oggetti di $\mathbf{Top}$ e possiamo perciò considerare il prodotto $\prod_{i\in I} \mathcal{X}_i$ in $\mathbf{Top}$ di tale famiglia (assieme alle varie proiezioni sui fattori). Ora, è noto che il prodotto arbitrario di spazi di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff, mentre il Teorema di Tychonoff garantisce che il prodotto arbitrario di spazi compatti è a sua volta compatto. Ne segue che $\prod_{i\in I} \mathcal{X}_i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$ e chiaramente costituisce un prodotto di $(\mathcal{X}_i)_{i\in I}$ in $\mathbf{CHaus}$. Dunque, $\mathbf{CHaus}$ ammette prodotti piccoli qualsiasi.
- Siano $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CHaus}}(\mathcal{X},\ \mathcal{X}')$. Vogliamo costruire un equalizzatore di $f$ e $g$ in $\mathbf{CHaus}$. Anche questa volta, possiamo considerare $i(f) = f$ e $i(g) = g$ come frecce di $\mathbf{Top}$ e costruire qui un loro equalizzatore che sarà pertanto dato da
$$(\mathcal{E},\ \iota\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{X}),$$
dove $\mathcal{E}$ è l'insieme $E := \{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$ ($X$ è l'insieme soggiacente a $\mathcal{X}$) dotato della topologia di sottospazio e $\iota$ è l'inclusione $E \hookrightarrow X$. Ora, $\mathcal{E}$ è uno spazio di Hausdorff, in quanto sottospazio di uno spazio di Hausdorff ed, essendo anche $\mathcal{Y}$ di Hausdorff, è in realtà pure chiuso. Ma allora $\mathcal{E}$ è un chiuso nel compatto $\mathcal{X}$, pertanto è esso stesso compatto. Ne segue che $\mathcal{E} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$ e $(\mathcal{E},\ \iota)$ è un equalizzatore di $f$ e di $g$ in $\mathbf{CHaus}$.

Ne ricaviamo che $\mathbf{CHaus}$ è completa.

A questo punto, è evidente che l'inclusione $i$ preserva i limiti e quindi ci basta verificare la SSC per $i$. Sia dunque $\mathcal{S} = (S,\ \sigma)$ uno spazio topologico qualsiasi. Dobbiamo trovare un insieme piccolo $I$ e una famiglia di frecce $(f_i\colon \mathcal{S} \longrightarrow i(\mathcal{X}_i) = \mathcal{X}_i)_{i\in I}$ di $\mathbf{Top}$ tali che ogni funzione continua $h\colon \mathcal{S} \longrightarrow i(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ tra spazi topologici (dove $\mathcal{X} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$) fattorizzi mediante una delle $f_i$. Affermiamo che ciò è una conseguenza del seguente

**Lemma 1.** *Sia* $\mathcal{K} = (K,\ \tau)$ *uno spazio topologico compatto e di Hausdorff e sia* $C \subseteq K$ *un sottospazio di* $\mathcal{K}$. *Allora la chiusura* $\overline{C}$ *di* $C$ *in* $\mathcal{K}$ *ha cardinalità al più* $2^{2^{|C|}} = |\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))|$.

Prima di provare questo risultato, vediamo come esso implichi la SSC desiderata. Sia $\mathcal{S} = (S,\ \sigma) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ e consideriamo l'insieme $I$ delle funzioni continue $f\colon \mathcal{S} \longrightarrow (C,\ \nu)$, dove $(C,\ \nu) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$ con $C \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$. Prendiamo poi come famiglia di mappe continue $f_i\colon \mathcal{S} \longrightarrow i(\mathcal{X}_i) = \mathcal{X}_i$ l'insieme $I$ stesso.[5] Sia quindi

[5] Ogni insieme può indiciare ed essere indiciato da se stesso!

$h\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{X}$ una funzione continua, con $\mathcal{X} = (X,\ \tau) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$. Per il lemma precedente e poiché $|h(S)| \leq |S|$, abbiamo che

$$|\overline{h(S)}| \leq 2^{2^{|h(S)|}} \leq 2^{2^{|S|}},$$

ossia esiste una mappa iniettiva (di insiemi) $j\colon \overline{h(S)} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$. Ne segue che esistono un $C \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ (dato da $j(\overline{h(S)})$) e una topologia $\nu$ su $C$ (dove gli aperti sono le immagini secondo $j$ degli aperti in $\overline{h(S)}$) tale che vi sia un omeomorfismo $t\colon \overline{h(S)} \longrightarrow (C,\ \nu)$ ($\overline{h(S)}$ è dotato della topologia di sottospazio). Inoltre, poiché $\overline{h(S)} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$, anche $(C,\ \nu) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$. Ma allora, se $\overline{h}$ è $h$ considerata come funzione $S \longrightarrow \overline{h(S)}$, la composizione $t \circ \overline{h}$ è uno degli elementi, diciamolo $f$, di $I$. Concludiamo allora che, detta $j'$ l'inclusione di $\overline{h(S)}$ in $X$, $h = (j' \circ t^{-1}) \circ f$ è la fattorizzazione cercata di $h$.

Ci resta quindi solo da validare il Lemma 1. Osservando le stesse notazioni dell'enunciato, possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $C$ sia denso in $\mathcal{K}$ (se così non fosse, basterebbe sostituire $\mathcal{K}$ con $\overline{C}$). Dobbiamo trovare una mappa iniettiva $l\colon K \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$. Per $k \in K$, definiamo

$$l(k) := \{T \in \mathcal{P}(C) :\ k \in \overline{T} \subseteq K\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C)).$$

(Qui $\overline{T}$ è la chiusura di $T$ in $\mathcal{K}$). Se $k, k' \in K$ e $k \neq k'$, poiché $\mathcal{K}$ è di Hausdorff, esistono un intorno aperto $U$ di $k$ in $\mathcal{K}$ e un intorno aperto di $V$ di $k'$ in $\mathcal{K}$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Pertanto, $U \cap C \notin l(k')$, mentre, essendo $C$ denso in $\mathcal{K}$, $U \cap C \in l(k)$ e $l(k) \neq l(k')$, come richiesto per l'iniettività di $l$.

Ciò conclude la dimostrazione della proposizione. □

Prima di addentrarci nel prossimo ed ultimo esempio che vedremo, abbiamo bisogno di una definizione topologica.

**Definizione 6** (*Spazio Compattamente Generato*)**.** Sia $\mathcal{X} = (X,\ \tau)$ uno spazio topologico. Si dice che $\mathcal{X}$ è *compattamente generato* se soddisfa la proprietà seguente:

"Un sottospazio $A$ di $\mathcal{X}$ è chiuso in $\mathcal{X}$ se e solo se, per ogni compatto $K$ di $\mathcal{X}$, $A \cap K$ è chiuso in $K$."

Raccogliamo qualche fatto sugli spazi compattamente generati.

**Osservazione 9.** i. La definizione precedente si può equivalentemente dare sostituendo ovunque il termine *chiuso* con la parola *aperto*.

ii. *Un chiuso $C$ in uno spazio compattamente generato $\mathcal{X}$ è compattamente generato (con la topologia indotta da $\mathcal{X}$).* Infatti, se $A \subseteq C$ è tale che $A \cap K$ è chiuso in $C$ per ogni compatto $K$ di $C$, poiché $C$ è chiuso in $\mathcal{X}$, basta mostrare che $A$ è chiuso in $\mathcal{X}$. Sia dunque $L$ un compatto di $\mathcal{X}$. Poiché $C$ è chiuso, $C \cap L$ è compatto in $C$ e allora $A \cap L = A \cap C \cap L$ è chiuso in $C \cap L$ e quindi anche in $L$ (perché $C \cap L$ è chiuso in $L$). Ne segue che $A$ è chiuso in $\mathcal{X}$.

iii. *Gli spazi localmente compatti sono compattamente generati.* Infatti, sia $\mathcal{X} = (X,\ \tau)$ uno spazio localmente compatto e sia $A \subseteq X$ tale che, per ogni compatto $K$ di $\mathcal{X}$, $A \cap K$ è chiuso in $K$. Preso $x \in \overline{A}$, mostriamo che in realtà $x \in A$. Sia $K$ un intorno compatto di $x$ in $\mathcal{X}$ (esiste per l'ipotesi di compattezza locale). Se $V$ è un intorno qualsiasi di $x$ in $\mathcal{X}$, allora anche $V \cap K$ è un intorno di $x$ e, poiché $x \in \overline{A}$, $V \cap K \cap A \neq \emptyset$ ($\overline{A}$ è l'insieme dei punti di $\mathcal{X}$ aderenti ad $A$). Ciò mostra che $x \in \overline{K \cap A}$. Ma, per l'ipotesi su $A$, $K \cap A$ è chiuso in $K$ e quindi otteniamo che $x \in A$.

iv. *Ogni spazio primo-numerabile è compattamente generato.* In particolare, quindi, gli spazi metrizzabili sono compattamente generati. Poiché non tutti gli spazi metrici sono localmente compatti (basta prendere uno spazio reale di Banach di dimensione infinita), ciò dice che la proprietà di essere compattamente generato per uno spazio topologico è strettamente più debole di quella di essere localmente compatto. Mostriamo ora che se $\mathcal{X} = (X, \tau)$ è uno spazio topologico primo-numerabile, allora è compattamente generato. Ricordiamo che un sottoinsieme $A$ di uno spazio primo-numerabile è chiuso se e soltanto se ogni limite di successioni di elementi di $A$ è ancora un elemento di $A$. Sia quindi $U \subseteq X$ tale che, per ogni compatto $K$ di $\mathcal{X}$, $U \cap K$ è chiuso in $K$. Consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $U$ convergente ad $x \in \overline{U}$. Chiaramente, $C := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ è compatto, perciò $C \cap U$ è un chiuso in $C$ per ipotesi. Poiché $x_n \in C \cap U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, anche $x$ appartiene a $C \cap U$ e quindi, in particolare, ad $U$. Ne segue che $U$ è chiuso e $\mathcal{X}$ è compattamente generato.

Enunciamo e dimostriamo un risultato che ci servirà nel seguito.

**Lemma 2.** *Sia $\mathcal{X} = (X,\ \tau)$ uno spazio di Hausdorff compattamente generato e sia $\mathcal{Y} = (Y,\ \sigma)$ uno spazio topologico qualsiasi. Le seguenti sono equivalenti, per una funzione $g\colon X \longrightarrow Y$:*

*i. $g$ è una funzione continua $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$;*

*ii. per ogni compatto $K$ di $\mathcal{X}$, $g_{|K}\colon K \longrightarrow \mathcal{Y}$ è continua (quando $K$ è dotato della topologia di sottospazio).*

*Dimostrazione.* Ricordiamo anzitutto che i compatti in uno spazio di Hausdorff sono chiusi. Il primo punto implica banalmente il secondo. Viceversa, supponiamo che valga *ii.* e sia $Z \subseteq Y$ un chiuso. Dobbiamo mostrare che $g^{-1}(Z)$ è chiuso in $\mathcal{X}$; se $K$ è un compatto di $\mathcal{X}$, allora $g^{-1}(Z) \cap K = (g_{|K})^{-1}(Z)$ è chiuso in $K$ per ipotesi. Poiché $K$ è chiuso in $\mathcal{X}$, $g^{-1}(Z) \cap K$ è un chiuso anche di $\mathcal{X}$, il che ci consente di concludere perché $\mathcal{X}$ è compattamente generato. □

4. Sia **Haus** la sottocategoria piena di **Top** data dagli spazi di Hausdorff e denotiamo con **CGHaus** la sottocategoria piena di **Haus** data dagli spazi di Hausdorff compattamente generati (anche detti *spazi di Kelley*). Cominciamo col mostrare che questa sottocategoria dialoga bene con **Haus**, nel senso precisato dalla

   **Proposizione 5. CGHaus** *è una sottocategoria coriflessiva di* **Haus**.

   *Dimostrazione.* Costruiamo esplicitamente un aggiunto destro all'inclusione

$$\mathbf{CGHaus} \longrightarrow \mathbf{Haus}$$

e una trasformazione naturale $\varepsilon$ che funga da counità dell'aggiunzione. Sia dunque $\mathcal{Y} = (Y,\ \sigma) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Haus})$ e consideriamo lo spazio topologico $K(\mathcal{Y})$ dato dall'insieme $Y$ con la topologia la cui famiglia di chiusi è costituita da tutti e soli gli $A \subseteq Y$ tali che $A \cap C$ è chiuso in $C$, per ogni compatto $C$ di $\mathcal{Y}$. ($K(\mathcal{Y})$ è detto *"Kelleificazione"* o *"k-ficazione"* di $\mathcal{Y}$). Dunque i sottoinsiemi chiusi di $\mathcal{Y}$ sono chiusi anche in $K(\mathcal{Y})$, ossia l'identità $id_Y$ è una mappa continua $K(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}$ e chiaramente $K(\mathcal{Y})$ è di Hausdorff. Per mostrare che $K(\mathcal{Y})$ è compattamente generato, abbiamo bisogno di alcuni semplici passaggi intermedi che raccogliamo insieme nel prossimo lemma, a futura referenza.

**Lemma 3.** *Sia $\mathcal{Y}$ uno spazio di Hausdorff. Valgono i seguenti fatti.*

*(i)* $id_Y \colon K(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}$ *è un omeomorfismo se e soltanto se $\mathcal{Y}$ è compattamente generato.*

*(ii) Sia $C \subseteq Y$ un compatto di $\mathcal{Y}$ e denotiamo con $C_0$ l'insieme $C$ quando visto come sottospazio di $K(\mathcal{Y})$, ossia $C_0 = id^{-1}(C)$, dove $id = id_Y \colon K(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}$. Allora $id_{|C} \colon C_0 \longrightarrow C$ è un omeomorfismo. In particolare, $C_0$ è compatto in $\mathcal{Y}$ e un sottoinsieme $C$ di $Y$ è compatto in $\mathcal{Y}$ se e solo se è compatto in $K(\mathcal{Y})$.*

*(iii) $K(\mathcal{Y})$ è compattamente generato.*

*Dimostrazione.* (i) $id_Y \colon K(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}$ è un omeomorfismo se e solo se è una mappa aperta. Ciò è equivalente a chiedere che ogni aperto $U$ di $K(\mathcal{Y})$ è aperto anche in $\mathcal{Y}$ e questo significa precisamente che $\mathcal{Y}$ è compattamente generato.

(ii) Ci basta mostrare che $id_{|C}$ è una mappa aperta. Sia dunque $U \subseteq C_0$ aperto e scriviamo $U = O \cap C_0$, per qualche aperto $O$ di $K(\mathcal{Y})$. Abbiamo

$$id_{|C}(U) = id_{|C}(O \cap C_0) = id(O) \cap id(C_0) = id(O) \cap C$$

e quest'ultimo è aperto in $C$, perché, per definizione di $K(\mathcal{Y})$, $O$ è aperto in $K(\mathcal{Y})$ se e solo se $id(O) \cap C$ è aperto in $C$, per ogni compatto $C$ di $\mathcal{Y}$.

(iii) Sia $A \subseteq Y$ un sottospazio di $K(\mathcal{Y})$ tale che $A \cap C$ è chiuso in $C$ per ogni compatto $C$ di $K(\mathcal{Y})$. D'altra parte, per definizione di $K(\mathcal{Y})$, $A$ è chiuso in $K(\mathcal{Y})$ se e soltanto se, per ogni compatto $D$ di $\mathcal{Y}$, $D \cap A$ è chiuso in $D$; ma un tale $D$ è compatto anche in $K(\mathcal{Y})$ per il punto (*ii*), il che ci permette di concludere.

□

A questo punto, poniamo $\varepsilon_{\mathcal{Y}} := id_Y \colon K(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathcal{Y}$ e sia $\mathcal{X} = (X,\ \tau) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CHaus})$. Se $f \colon X \longrightarrow Y$ è una mappa continua $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, allora, poiché $\mathcal{X}$ è compattamente generato, $f$ è anche una funzione continua $\mathcal{X} \longrightarrow K(\mathcal{Y})$. Ciò significa che $f \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ fattorizza (unicamente) attraverso $\varepsilon_{\mathcal{Y}}$, come nel diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & & K(\mathcal{Y}) \arrow[dl, "\varepsilon_{\mathcal{Y}}"] \\
& \mathcal{Y} &
\end{tikzcd}$$

dove $f'$ è $f$, vista come funzione continua $\mathcal{X} \longrightarrow K(\mathcal{Y})$. Perciò, se per ogni $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Haus}}(\mathcal{Y},\ \mathcal{W})$, definiamo $K(f)$ come la funzione $f$ vista come mappa continua $K(\mathcal{Y}) \longrightarrow K(\mathcal{W})$ (ossia, $K(f)$ è la funzione continua $(f \circ \varepsilon_{\mathcal{Y}})'$), allora otteniamo un funtore

$$K(-)\colon \mathbf{Haus} \longrightarrow \mathbf{CHaus}$$

ed $\varepsilon\colon \mathcal{Y} \mapsto \varepsilon_{\mathcal{Y}}$ definisce una trasformazione naturale $i(K(-)) \Rightarrow I_{\mathbf{Haus}}$ che costituisce la counità di un aggiunzione $i \dashv K(-)$, per il Teorema 1. $\square$

L'interesse per la categoria **CGHaus** risiede nella sua caratteristica di supplire ad una mancanza strutturale di **Top**. Infatti, sebbene la categoria degli spazi topologici condivida alcune importanti proprietà con **Set**, come la completezza e la cocompletezza, essa *non* è cartesiana chiusa (cfr. Definizione 3). La dimostrazione di questo risultato non è immediata e va decisamente oltre gli scopi di queste note (si veda [Bor2] §7.1 per una referenza). Possiamo invece provare il prossimo

**Teorema 3.** **CGHaus** *è una categoria cartesiana chiusa.*

*Dimostrazione.* Cominciamo col notare che **CGHaus** ammette prodotti binari.[6] Infatti, se $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus})$, è facile vedere che un prodotto di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ in **CGHaus**, $\mathcal{X}\square\mathcal{Y}$, è dato dallo spazio topologico

$$\mathcal{X}\square\mathcal{Y} = K(i(\mathcal{X}) \times i(\mathcal{Y})),$$

dove $i\colon \mathbf{CGHaus} \longrightarrow \mathbf{Haus}$ è il funtore inclusione e $i(\mathcal{X}) \times i(\mathcal{Y})$ è il prodotto di $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ in **Haus** (il quale ovviamente esiste, perché il prodotto di spazi Hausdorff è anch'esso Hausdorff), assieme alle proiezioni sui fattori.

Passiamo quindi a costruire un aggiunto destro al funtore

$$-\square\mathcal{Y}\colon \mathbf{CGHaus} \longrightarrow \mathbf{CGHaus},$$

per $\mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus})$. (Ricordiamo che un tale aggiunto, se esiste, è convenzionalmente denotato con $(-)^{\mathcal{Y}}$). Per fare ciò, partiamo da una situazione più generale. Siano quindi $\mathcal{W} = (W,\ \tau_W)$ e $\mathcal{Z} = (Z,\ \tau_Z)$ due spazi topologici qualsiasi e definiamo un altro spazio topologico $\mathrm{Cop}(\mathcal{W},\ \mathcal{Z})$ dato dall'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{W},\ \mathcal{Z})$ delle funzioni continue $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{Z}$ dotato della *topologia dei compatti-aperti.* Una sottobase per tale topologia è data, per ogni compatto $C$ di $\mathcal{W}$ e ogni aperto $U$ di $\mathcal{Z}$, dai sottoinsiemi $V(C, U) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{W},\ \mathcal{Z})$ i cui elementi sono le funzioni continue $h\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{Z}$ tali che $h(C) \subseteq U$. Ora, se $\mathcal{Z}$ è di Hausdorff, anche $\mathrm{Cop}(\mathcal{W}, \mathcal{Z})$ lo è. Infatti, se $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{W},\ \mathcal{Z})$ e $f \neq g$, allora esiste $w \in W$ tale che $f(w) \neq g(w)$. Prendendo quindi due aperti disgiunti $U_1$ e $U_2$ in $\mathcal{Z}$ tali che $f(w) \in U_1$ e $g(w) \in U_2$ abbiamo $V(\{w\},\ U_1) \cap V(\{w\},\ U_2) = \emptyset$, ossia $\mathrm{Cop}(\mathcal{W},\ \mathcal{Z})$ è uno spazio di Hausdorff.

A questo punto, dati $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus})$, definiamo

$$\mathcal{X}^{\mathcal{Y}} := K(\mathrm{Cop}(\mathcal{Y},\ X)).$$

[6] In effetti, **CGHaus** è completa e cocompleta.

Vogliamo ora definire una freccia $e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}\colon \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}\square\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ che costituirà la valutazione in $\mathcal{Y}$, ossia la counità dell'aggiunzione che stiamo costruendo. Consideriamo perciò la funzione di insiemi

$$e_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X}) \times Y \longrightarrow X, \qquad (f, x) \mapsto f(x)$$

e mostriamo che è continua come mappa $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}\square\mathcal{Y}\longrightarrow\mathcal{X}$ (l'insieme soggiacente a $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}\square\mathcal{Y}$ è $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X}) \times Y$). Ora, una mappa insiemistica $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X}) \times Y \longrightarrow X$ è una funzione continua $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}\square\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ se e solo se è continua la sua restrizione a ogni compatto di $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}\square\mathcal{Y} = K(i(\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}) \times i(\mathcal{Y})) = K(K(\operatorname{Cop}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X})) \times \mathcal{Y})$, dove nel lato destro dell'ultima uguaglianza abbiamo omesso il funtore inclusione $i$ per aumentare la leggibilità. Ma per ogni spazio di Hausdorff $\mathcal{W}$, i compatti di $\mathcal{W}$ e di $K(\mathcal{W})$ sono gli stessi per il Lemma 3. Perciò ci basta mostrare che $e_{X,Y}$ è una funzione continua sui compatti di $\operatorname{Cop}(\mathcal{X},\ \mathcal{Y}) \times \mathcal{Y}$ (inteso come prodotto in **Haus**) e, poiché ogni sottoinsieme compatto nella topologia prodotto è contenuto nel prodotto delle sue proiezioni sui fattori, possiamo ridurci in ultima analisi a dimostrare che $e_{X,Y}$ è una funzione continua sugli insiemi della forma $D \times C$, dove $D$ è compatto in $\operatorname{Cop}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$ e $C$ è compatto in $\mathcal{Y}$. Fissiamo dunque un tale insieme $D \times C$ e sia $(f, y)$ un suo elemento. Preso un aperto $U$ di $\mathcal{X}$ contenente $f(y)$, poiché $f$ è una mappa continua $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ e $C$ è compatto[7], esiste un intorno $M$ di $y$ in $C$ tale che $f(\overline{M}) \subseteq U$ ($M$ ha la stessa chiusura sia in $C$ che in $\mathcal{X}$ perché $C$ è un chiuso in $\mathcal{X}$, in quanto compatto in un Hausdorff). Ma a questo punto $V(\overline{M},\ U)$ è un aperto in $\operatorname{Cop}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$ e $(V(\overline{M},\ U) \cap D) \times M$ è aperto in $D \times C$, contiene $(f, y)$ e viene mappato da $e_{X,Y}$ in $U$. Ciò significa che $e_{X,Y}$ è continua e quindi possiamo porre $e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} := e_{X,Y}$.

Proviamo ora che, per un fissato $\mathcal{X} \in \operatorname{Ob}(\mathbf{CHaus})$, $e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ è una freccia universale da $-\square\mathcal{Y}$ a $\mathcal{X}$. Consideriamo dunque una freccia $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{Z}\square\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$ e definiamo la mappa di insiemi

$$k\colon Z \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y,\ X), \qquad z \mapsto (k(z)\colon Y \ni y \mapsto h(z, y) \in X).$$

(Qui $Z$ è l'insieme soggiacente a $\mathcal{Z}$ e analogamente per $X$ e $Y$). Si verifica immediatamente che, per ogni $z \in Z$, $k(z)$ è una funzione continua $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$. Mostriamo ora che $k$ è una mappa continua $\mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$. Poiché $\mathcal{Z}$ è compattamente generato, è sufficiente verificare che $k$ è una funzione continua $\mathcal{Z} \longrightarrow \operatorname{Cop}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Siano pertanto $z \in Z$ e $V(C,\ U)$ un aperto nella sottobase di $\operatorname{Cop}(\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$ tale che $k(z) \in V(C,\ U)$, ossia $h(\{z\} \times C) \subseteq U$. Poiché $U$ è aperto in $\mathcal{X}$, $C$ è compatto in $\mathcal{Y}$ e $h$ è continua, esiste un intorno $V$ di $z$ in $\mathcal{Z}$ tale che $h(V \times C) \subseteq U$. Questo vuol dire che $k(V) \subseteq V(C,\ U)$, ossia $k$ è una mappa continua $\mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$.

Abbiamo perciò provato che, comunque data $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{Z}\square\mathcal{Y},\ \mathcal{X})$, esiste $k \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{Z},\ \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})$ tale che $e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \circ (k\square 1_{\mathcal{Y}}) = h$. A questo punto è evidente che questa $k$ è l'unica freccia $\mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ con tale proprietà, perché se $k'\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ verifica $e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \circ (k'\square 1_{\mathcal{Y}}) = h$ , allora $e_{X,Y} \circ (k' \times 1_{\mathcal{Y}}) = h$ è una fattorizzazione di $h$ in **Set**, ossia $k = k'$ come mappe di insiemi e dunque anche come morfismi in **CGHaus**.

[7] Gli spazi compatti di Hausdorff sono tali da ammettere, per ogni loro punto, un sistema fondamentale di intorni compatti.

Infine, se $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, $g \circ e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{X}^{\mathcal{Y}} \square \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ e allora, per quanto appena visto, esiste un'unica freccia $t\colon \mathcal{X}^{\mathcal{Y}} \longrightarrow \mathcal{Z}^{\mathcal{Y}}$ tale che $e_{\mathcal{Z},\mathcal{Y}} \circ (t \square 1_{\mathcal{Y}}) = g \circ e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$. Ponendo $(g)^{\mathcal{Y}} := t$, otteniamo un funtore

$$(-)^{\mathcal{Y}}\colon \mathbf{CGHaus} \longrightarrow \mathbf{CGHaus}$$

e $e_{\bullet,\mathcal{Y}}\colon \mathcal{X} \mapsto e_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ diventa una trasformazione naturale $(-)^{\mathcal{Y}} \square \mathcal{Y} \Rightarrow I_{\mathbf{CGHaus}}$, terminando la dimostrazione che **CGHaus** è una categoria cartesiana chiusa.

□

Dunque, grazie al teorema appena mostrato, dati $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus})$, abbiamo una biiezione naturale

$$\varphi = \varphi_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{Z} \square \mathcal{Y},\ \mathcal{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{Z},\ \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}). \tag{20}$$

In alcuni contesti topologici, è utile considerare la categoria $\mathbf{CGHaus}_*$ degli spazi di Hausdorff compattamente generati *puntati*: i suoi oggetti sono le coppie $(\mathcal{X}, *_{\mathcal{X}})$, dove $\mathcal{X} = (X,\ \tau) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus})$ e $*_{\mathcal{X}}$ è un elemento di $X$ (detto *punto base di* $\mathcal{X}$), mentre, per ogni $(\mathcal{X},\ *_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\ *_{\mathcal{Y}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus}_*)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}((\mathcal{X},\ *_{\mathcal{X}}),\ (\mathcal{Y},\ *_{\mathcal{Y}})) := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{X},\ \mathcal{Y}) :\ f(*_{\mathcal{X}}) = *_{\mathcal{Y}}\}.$$

Ora, dati $(\mathcal{X},\ *_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\ *_{\mathcal{Y}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus}_*)$, possiamo considerare $\mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}}$, definito come il sottospazio di $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ consistente di tutte le mappe in $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ che preservano i punti base. Poiché $\mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}}$ è chiaramente un sottospazio chiuso di $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$, per l'Osservazione 9 è compattamente generato e quindi appartiene a $\mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus})$. Inoltre, esso ammette un naturale punto base, dato dalla funzione costante $*_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}$ che mappa ogni elemento di $Y$ in $*_{\mathcal{X}}$, dunque possiamo considerare $(\mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}},\ *_{\mathcal{Y},\mathcal{X}})$ come oggetto di $\mathbf{CGHaus}_*$.

Consideriamo a questo punto, presi $(\mathcal{X},\ *_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y},\ *_{\mathcal{Y}})$, $(\mathcal{Z},\ *_{\mathcal{Z}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus}_*)$, l'aggiunzione (20). Possiamo prendere, nel lato destro di tale isomorfismo, il sottoinsieme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(\mathcal{Z},\ \mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}})$ (dove abbiamo omesso di indicare esplicitamente i punti base per semplicità notazionale) e ci chiediamo se vi sia uno spazio topologico puntato $(\mathcal{W},\ *_{\mathcal{W}}) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus}_*)$ (legato a $\mathcal{X}$ e a $\mathcal{Z}$) tale per cui $\varphi_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}$ si restringa opportunamente per dare un'aggiunzione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(\mathcal{W},\ \mathcal{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(\mathcal{Z},\ \mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}}). \tag{21}$$

Sia dunque $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}}(\mathcal{Z} \square \mathcal{Y},\ \mathcal{X})$ e consideriamo $f^\sharp := \varphi_{\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}}(f)\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$. Quindi, per ogni $z \in Z$, $f^\sharp(z) := f(z, -)$. Ora, $f^\sharp \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(\mathcal{Z},\ \mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}})$ se e solo se, per ogni $z \in Z$ e ogni $y \in Y$, abbiamo

$$(f^\sharp(z))(*_{\mathcal{Y}}) = *_{\mathcal{X}} \quad \text{e} \quad (f^\sharp(*_{\mathcal{Z}}))(y) = *_{\mathcal{X}},$$

ossia

$$f(z,\ *_Y) = *_{\mathcal{X}} = f(*_{\mathcal{Z}},\ y).$$

Dunque, $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(\mathcal{Z},\ \mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}})$ se e solo se $f$ manda ogni punto di

$$\mathcal{Z} \vee \mathcal{Y} := (\mathcal{Z} \square \{*_{\mathcal{Y}}\}) \cup (\{*_{\mathcal{Z}}\} \square \mathcal{Y})$$

in un punto $*_X$ o, equivalentemente, se induce una funzione continua $\mathcal{Z}\square\mathcal{Y}/\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y}$ (con questa notazione intendiamo il quoziente di $\mathcal{Z}\square\mathcal{Y}$ per la relazione di equivalenza che collassa $\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y}$ ad un punto). Vorremmo perciò porre $\mathcal{W} := \mathcal{Z}\square\mathcal{Y}/\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y}$, dal momento che questo spazio ha un naturale punto base, dato dalla classe di un qualsiasi punto in $\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y}$. Sappiamo tuttavia che, in generale, nonostante il quoziente di spazi compattamente generati sia ancora compattamente generato (esercizio!), il quoziente di spazi Hausdorff non è Hausdorff, ossia $\mathcal{W}$ non apparterrebbe a **CGHaus**.

Tuttavia, a ciò c'è rimedio. Infatti, è possibile dimostrare, usando il Teorema 2, che la categoria **Haus** è completa e cocompleta e l'inclusione $\mathbf{Haus}\longrightarrow\mathbf{Top}$ ammette un aggiunto destro $H\colon \mathbf{Top}\longrightarrow\mathbf{Haus}$, ossia **Haus** è una sottocategoria riflessiva di **Top**, in cui l'unità $\eta$ è suriettiva in ogni componente $\eta_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E}\longrightarrow H(\mathcal{E})$ (per $\mathcal{E}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$). Ne segue che, $H(\mathcal{Z}\square\mathcal{Y}/\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus})$ e quindi possiamo scegliere $\mathcal{W}$ come tale spazio, prendendo per punto base l'immagine secondo $\eta_{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E} := \mathcal{Z}\square\mathcal{Y}/\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y}$) della classe di un qualunque punto di $\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y}$. Ponendo $\mathcal{Z}\wedge\mathcal{Y} := H(\mathcal{Z}\square\mathcal{Y}/\mathcal{Z}\vee\mathcal{Y})$, otteniamo allora la desiderata aggiunzione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(\mathcal{Z}\wedge\mathcal{Y},\ \mathcal{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{CGHaus}_*}(\mathcal{Z},\ \mathcal{X}^{(*)\mathcal{Y}}). \tag{22}$$

Osserviamo ora che la circonferenza $S^1$ si può ottenere come quoziente $I/\{0,1\}$, dove $I$ è l'intervallo chiuso $[0,1]$, e, poiché $S^1$ è Hausdorff, $I/\{0,1\} = H(I/\{0,1\})$. Possiamo allora definire due funtori

$$\mathbf{CGHaus}_* \underset{\Omega}{\overset{\Sigma}{\rightleftarrows}} \mathbf{CGHaus}_*$$

dove, per $\mathcal{X}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus}_*)$ (al solito omettiamo il punto base per semplicità),

$$\Sigma(\mathcal{X}) := \mathcal{X}\wedge S^1 \quad \text{e} \quad \Omega(\mathcal{X}) := \mathcal{X}^{(*)S^1}. \tag{23}$$

$\Sigma$ è detto *(funtore) sospensione ridotta*, mentre $\Omega$ è chiamato *(funtore) spazio dei cappi* (*loop space*) e la discussione precedente assicura che $(\Sigma,\ \Omega)$ costituisca un'aggiunzione $\Sigma\dashv\Omega$. Geometricamente, per $\mathcal{X}\in\mathrm{Ob}(\mathbf{CGHaus}_*)$, $\Omega(\mathcal{X})$ è esattamente dato dai cappi in $\mathcal{X}$ nel punto base $*_{\mathcal{X}}$, mentre $\Sigma(\mathcal{X})$ è il cilindro $\mathcal{X}\times I$ dove $\{*\}\times I$ e le basi $X\times\{0\},\ X\times\{1\}$ sono collassate ad un singolo punto, che è il nuovo punto base di $\Sigma(\mathcal{X})$. Ad esempio, $\Sigma(S^1) = S^1\wedge S^1 \simeq S^2$, la sfera 2-dimensionale (in $\mathbb{R}^3$).

# Bibliografia

[Bor1] Francis Borceaux, *Handbook of Categorical Algebra 1, Basic Category Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Bor2] Francis Borceaux, *Handbook of Categorical Algebra 2, Categories and Structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Dgn] James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1996.

[Hsn] Taqdir Husain, *Topology and Maps*, Plenum Press, New York, 1977.

[McL] Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

[Stf] *Category Theory*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 6 Dicembre 1996.